Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques II-1"

(Semestre 2, groupe 1)

Examen terminal (deuxième session)

mardi 27 janvier 2004 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

1) Soit $c \geq 1$ un réel fixé. On note, pour tout $x > 0$,

$$f_c(x) = \frac{x}{x^2 + c}.$$

En étudiant la fonction f_c, montrer que f_c est une fonction bornée ; justifier l'existence de $\operatorname*{Sup}_{x>0} f_c(x)$ et de $\operatorname*{Inf}_{x>0} f_c(x)$. Déterminer les valeurs de ces deux réels.

2) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $y \geq 1$,

$$0 \leq \frac{x}{x^2 + y} \leq \frac{1}{2}.$$

3) On note $A = \{\frac{x}{x^2 + y} \mid x > 0, y \geq 1\}$.

Montrer que $\operatorname{Sup} A$ et $\operatorname{Inf} A$ existent et les calculer. Est-ce que $\operatorname{Max} A$ existe ? Est-ce que $\operatorname{Min} A$ existe ?

Exercice 2

Dire (et justifier) si l'intégrale suivante est convergente ou divergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3 + t^{1/5}}{t^5 + t}\, dt$$

Exercice 3

On fixe une suite de réels $(\lambda_n)_{n\geq 0}$, et on suppose que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq \lambda_n \leq 1$, puis on définit une nouvelle suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \lambda_n u_n^2 + (1 - \lambda_n) u_n \quad \text{(pour tout } n \geq 0) \end{cases}$$

1) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < 1$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

(TSVP)

3) Montrer que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4
On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t + t^2 + t^5) \\ y(t) = \sin(t^2 + t^3) \end{cases}$$

1) Montrer que cette courbe admet un point singulier pour la valeur $t = 0$ de la variable.

2) Quelle est la pente de la tangente en ce point singulier ?

3) Préciser la nature de ce point singulier.