Université Claude Bernard Lyon 1 2003-2004

Mathématiques II-1 Analyse
Examen terminal (première session)
Jeudi 3 juin 2004
Durée 2h00

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont formellement interdits.

Exercice 1. On considère la courbe plane paramétrée par

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{(t+1)^2}{4} + \frac{1}{t},$$

où $t \in \mathbb{R}^*$.

1) Montrer que cette courbe admet un point singulier et le déterminer.
2) Quelle est la pente de la tangente en ce point singulier ?
3) Préciser la nature de ce point singulier.

Exercice 2.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale généralisée suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{1+t}\, dt$$

diverge si $\alpha \leq 0$ et converge si $\alpha > 0$.

Dans ce qui suit on suppose $\alpha > 0$ et on pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{1+t}\, dt$.

2) Montrer que $F(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}$.
3) Montrer que $F(\alpha)$ a une limite quand $\alpha \to +\infty$ et la déterminer.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

1) Calculer u_0, u_1 et u_2. (On pourra faire le changement de variables $x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.)
2) Sans calculer explicitement u_n, montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.
3) A l'aide d'un encadrement de $\sqrt{1+x^2}$ sur $[0,1]$, montrer que pour tout n

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de u_n.

4) Pour $n \geq 3$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\, dx.$$

a) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $u_n + u_{n-2} = I_n$.
b) Montrer que $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$. (On pourra faire une intégration par parties en utilisant la dérivée de $\sqrt{1+x^2}$.)
c) En déduire que $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.
d) En utilisant ce qui précède, montrer que la suite (nu_n) est convergente et déterminer sa limite.