Université Claude Bernard Lyon 1 2003-2004

Mathématiques II-1 Analyse
Examen terminal (deuxième session)
Mercredi 30 juin 2004
Durée 1h30

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont formellement interdits.

Exercice 1. On définit une suite (u_n) par la relation de récurrence $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$ avec u_0 et u_1 réels données. On pose

$$v_n = u_{n+1} - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}.$$

a) Déterminer une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n et en déduire l'expression de v_n en fonction de n, u_0 et u_1.

b) Calculer S_n de deux façons différentes et en déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

a) Montrer que $I_n = J_n$.

b) Montrer que la suite (J_n) est décroissante.

c) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre J_n et J_{n+2} et en déduire une expression explicite de J_n.

Exercice 3. Dire et justifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes :

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{2+\sin t}}\, dt$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t(1+t)^2}\, dt$ *c)* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin t}}{\sqrt{t}}\, dt$

Exercice 4. Soit (C) la courbe plane paramétrée par

$$x(t) = \frac{3t^2}{2} + t - \ln(1+t) \quad \text{et} \quad y(t) = e^t - \ln(1+t)$$

où $t \in]-1, +\infty[$.

a) Montrer que la courbe (C) admet des branches infinies en -1 et $+\infty$.

b) Étudier ces branches infinies (branches paraboliques, directions asymptotiques, asymptotes).

c) Dans le cas d'une asymptote, préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote dans le voisinage du point en question (dire et justifier si la courbe est en-dessous ou au-dessus de l'asymptote).

d) Donner le développement limité à l'ordre 4 de $x(t)$ et $y(t)$ en $t = 0$.

e) Montrer que $t = 0$ est un point singulier (ou stationnaire), déterminer l'équation de la tangente en ce point et préciser la nature de ce point singulier.

f) Existe-t-il d'autres points singuliers ?