Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques II-2"

(Semestre 2, groupe 1)

Épreuve de contrôle continu

mardi 18 novembre 2003 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur une seule page.

Exercice 1

On note $\mathbf{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2.
Soit $f : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ l'application qui associe à tout polynôme P de $\mathbf{R}_2[X]$ le reste de la division euclidienne de XP par $X^3 - 1$.

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer l'image de f.

3) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.

4) Déterminer $f^{-1}(\{X+1\})$.

5) Calculer f^3.

Exercice 2

On note $F = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid 7 \text{ est une racine double de } P\}$, et $\mathbf{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 1.

Montrer que $\mathbf{R}[X] = F \oplus \mathbf{R}_1[X]$.

Exercice 3

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$. On suppose que E vérifie la propriété suivante : pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme de degré n qui est élément de E.

1) Montrer, par une récurrence à bien rédiger, que pour tout $n \geq 0$, $X^n \in E$.

2) Montrer que $E = \mathbf{R}[X]$.

Exercice 4

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ le polynôme :

$$P = X^3 + 3X^2 + 6X + 5.$$

1) Montrer que les racines de P (dans $\mathbf{C}$) sont simples. On les notera α, β et γ dans les questions qui suivent (on ne cherchera pas à calculer ces racines).

2) Que vaut $\alpha + \beta + \gamma$?

3) En calculant préalablement $(\alpha + \beta + \gamma)^2$, déterminer la valeur de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

4) Calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.