Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques II-2"

(Semestre 2, groupe 1)

Examen terminal (première session)

mercredi 7 janvier 2004 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Soit $P = X^4 - X^3 + 8X^2 - 5X + 15$ et $Q = 3X^4 + 3X^3 + 18X^2 + 15X + 15$.

1) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$. Déterminer le PGCD de P et Q.

2) Dans cette question P et Q sont deux polynômes de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]$. Déterminer le PGCD de P et Q.

Exercice 2

Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif, et soit a, b, c, d et e cinq éléments de $\mathbf{K}$.

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix}.$$

Exercice 3

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrices à coefficients réels.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) deux bases de E ; soit F un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 1 et f_1 un vecteur non nul de F.

On suppose que la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est la matrice P.

1) Calculer la matrice P^{-1}.

2) Soit u l'application linéaire de E vers F dont la matrice est A dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1). Déterminer la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et $(5f_1)$.

(TSVP)

Exercice 4

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, matrice à coefficients réels.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.
Soit enfin $a = (3, 5, 6)$.

1) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme u.

Dans toute la suite, on note E l'espace propre de u pour la plus petite valeur propre, et F l'espace propre de u pour la plus grande valeur propre.

2) A-t-on ou non $E \oplus F = \mathbf{R}^3$? La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Montrer que $u(F) = F$.

4) Expliciter un vecteur $e \in E$ et un vecteur $f \in F$ tels que $a = e + f$.

5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ tel que $a \in G$ et que $u(G) = G$.

   a) Montrer que $e \in G$ (e désignant le vecteur trouvé sous ce nom à la question précédente).

   b) Montrer que $E \subset G$.

6) Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 tel que $E \subset H$.

   a) Montrer que $F \cap H$ est une droite.

   b) Montrer que $u(H) \subset H$.

   c) Montrer que $u(H) = H$.