Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques II-2"

(Semestre 2, groupe 1)

Examen terminal (deuxième session)

mardi 27 janvier 2004 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ le polynôme :

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1.$$

On note selon l'usage $j = e^{2i\pi/3}$. On rappelle que $j^3 = 1$ et que $j^2 + j + 1 = 0$.

1) Montrer que j est racine de P.

2) Montrer que j est racine au moins double de P.

3) En utilisant la parité de P d'une part, le fait que P est à coefficients réels d'autre part, déterminer trois autres racines complexes de P.

4) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2

On note $\mathbf{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de dimension inférieure ou égale à 2.
Soit f l'application de $\mathbf{R}_2[X]$ vers $\mathbf{R}[X]$ définie par :

$$\text{pour tout } P \text{ de } \mathbf{R}_2[X],\ f(P) = 2XP - X^2P'.$$

1) Montrer que f est linéaire, et que f envoie $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}_2[X]$.

2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

3) Le polynôme $X^2 + X + 2$ appartient-il à $\operatorname{Im} f$?

Exercice 3

Soit $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0\}$, $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0\}$
et $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\}$.
On note $D_1 = H_2 \cap H_3$, $D_2 = H_1 \cap H_3$ et $D_3 = H_1 \cap H_2$.
Soit ω_1, ω_2 et ω_3 trois réels (distincts).
On note A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}$$

(TSVP)

et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.

1) Montrer que H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, de dimension 2. On admettra sans en détailler la preuve qu'il en est de même de H_2 et de H_3.

2) Montrer que D_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, de dimension 1. On admettra sans en détailler la preuve qu'il en est de même de D_2 et de D_3.

3) Déterminer les vecteurs propres de u.

4) Montrer que $u(H_1) \subset H_1$.

5) Soit H un sous-espace de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$ tel que $u(H) \subset H$, avec $H \neq H_1$, $H \neq H_2$ et $H \neq H_3$.

a) Montrer que $\dim(H \cap H_1) = 1$.

b) Soit c_1 une base de $H \cap H_1$. Montrer que c_1 est un vecteur propre de u.

c) Montrer que H ne peut pas exister.