Université Claude Bernard Lyon I

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

Unité d'enseignement Math II-ALGEBRE

Epreuve de mathématiques

Examen 2eme Session

1er Juillet 2004 – durée : 1 heure 30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1 Discuter en fonction du paramètre réel a le rang du système $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 1, a, 0),\ u_2 = (1, a, 1, 0),\ u_3 = (a, 1, 1, 0).$$

Exercice 2 Soit n un entier positif et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère la matrice C de $M_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \frac{3}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{n}{n} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que e_1, $e_1 + e_2$, …, $e_1 + \ldots + e_n$ sont des vecteurs propres de C.
2. Diagonaliser C en calculant la matrice de passage P dans la base des vecteurs propres ainsi que son inverse.

Exercice 3 Soit u un réel quelconque, n un entier positif quelconque et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+u & u & \ldots & u \\ u & 1+u & \ldots & u \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u & u & \ldots & 1+u \end{pmatrix}.$$

Montrer : $\det(A) = 1 + nu$.

Exercice 4 On considère le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ suivant:

$$P(X) = X^4 + (1+i)X^3 - (11+2i)X^2 - (9+5i)X + 18 + 6i$$

On note A et B les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = A(X) + iB(X)$.

1. Soit a un **réel**. Montrer que a est racine de P si et seulement si a est racine de $PGCD(A, B)$.

2. Déterminer $PGCD(A, B)$, en déduire les décompositions en polynômes irréductibles de A et B dans $\mathbb{R}[X]$, puis la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5 Résoudre l'équation de $\mathbb{C}(X)$ suivante:

$$F + \frac{1}{F} = 1$$

(*On pourra chercher les solutions sous la forme* $F = \dfrac{P}{Q}$ *avec* P *et* Q *deux polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *premiers entre eux.*)