Université Claude Bernard Lyon 1 - Année 2003–04

Licence 1 - Math I

Contrôle continu du 6 avril 2004

EXERCICE 1.

1) On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : [0, 2\pi[& \longrightarrow & [-1,1] \times [-1,1] \\ x & \longmapsto & (\cos x, \sin x) \end{array}$$

(a) La fonction f est-t-elle injective ?
(b) La fonction f est-t-elle surjective ?

2) On considère maintenant la fonction g définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : [0, 2\pi[& \longrightarrow & \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\} \\ \alpha & \longmapsto & e^{i\alpha} \end{array}$$

(a) La fonction g est-t-elle injective ?
(b) La fonction g est-t-elle surjective ?

EXERCICE 2.

1) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange.
2) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(1+t)$. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.
3) En utilisant Taylor-Lagrange, en déduire l'encadrement de $\ln 2$ suivant :
$$\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}.$$
4) Montrer que
$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}}{\sqrt{1+t^3} - 1} = \frac{2}{3}.$$
(Indication : on commencera par donner un encadrement du numérateur.)

EXERCICE 3.

1) Soit f et g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. En considérant la fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t)$, montrer que
$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } \quad (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$
2) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.