

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

Unité d’enseignement Math I

Epreuve de mathématiques

1ère Session de JANVIER 2004

6 janvier 2004 – durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l’ordre de votre choix.

L’utilisation de documents de toute nature et de calculatrices n’est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d’appréciation significatif.

Exercice 1

Soit f l’application de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ définie par $f(t) = (32 + t)^{1/5}$.

1. Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$.
2. Soit $x > 0$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour l’application f sur l’intervalle $[0, x]$ avec un reste à l’ordre 2. En déduire que :

$$2 + \frac{1}{80}x - \frac{1}{6400}x^2 < (32 + x)^{1/5} < 2 + \frac{1}{80}x.$$

3. Montrer que :

$$\frac{161}{80} - \frac{1}{6400} < \sqrt[5]{33} < \frac{161}{80}.$$

Exercice 2

1. Calculer le développement limité de la fonction $t \mapsto (1 + t)^t$ à l’ordre 2 en $t = 0$.
2. En déduire le développement limité de la fonction $x \mapsto x^x$ à l’ordre 2 en $x = 1$.
3. En déduire la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}.$$

Exercice 3

1. Calculer le plus grand commun diviseur de 169 et 117.

2. Déterminer un couple $(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$169s + 117t = 26.$$

3. Existe-t-il un couple $(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$169s + 117t = 25 ?$$

Exercice 4

Rappelons que S_6 désigne l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dans lui-même. De plus S_6 muni de la composition est un groupe.

Soit $K = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma(4) = 4, \sigma(5) = 5, \sigma(6) = 6\}$.

1. Montrer que K est un sous-groupe de S_6 .
2. Quel est le cardinal de K ?
3. Soit $\sigma \in K$. Calculer σ^6 .
4. **QUESTION BONUS** : K est-t-il isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$?