Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

Unité d'enseignement Math I

Epreuve de mathématiques

2ième Session de JANVIER 2004

28 janvier 2004 – durée : 1H30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée.

La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1

Soit f l'application définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Enoncer le théorème des accroissements finis.
3. Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f'(c) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2

Déterminer

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x^2))^{1/x^4}.$$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 9 ?
2. Quel est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solutions de l'équation

$$x^3 + y^3 = 2004\,?$$

Exercice 4

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini ayant n éléments ($n \geq 2$) et soit e son élément neutre. On suppose que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe de $(G, \cdot)$ ayant deux éléments.
2. En déduire que n est pair.