

## Licence 1 - Math I

Examen du 3 juin 2004. Durée 2H

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

### EXERCICE 1.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  par

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}.$$

- (1) Justifier le fait que  $f$  est bien définie sur  $D_f$ .
- (2) Déterminer la limite à droite et à gauche de  $f$  en 1. Que peut-on en déduire ?
- (3) (a) Donner le développement limité de  $\frac{\ln(1+u)}{u}$  au voisinage de  $u = 0$  à l'ordre 2.  
(b) Donner le développement limité de  $e^v$  au voisinage de  $v = 0$  à l'ordre 2.  
(c) En déduire le développement limité de  $f(x)$  au voisinage de  $x = 1$  à l'ordre 2.
- (4) A l'aide de la question (2), montrer que  $f$  se prolonge en une fonction dérivable en 1.

### EXERCICE 2.

Calculer  $a$  et  $b$  pour que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\ln(1+x)} + \frac{a}{x} + b \right) = 0.$$

### EXERCICE 3.

- (1) Calculer le PGCD de 196 et 91.
- (2) Déterminer un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs tel que
$$196u + 91v = 49.$$
- (3) Existe-t-il un couple  $(u', v')$  d'entiers relatifs tel que
$$196u' + 91v' = 83?$$
- (4) Quels sont les restes de la division euclidienne de  $n^3$  par 7 ?
- (5) Quel est l'ensemble des couples  $(a, b)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$a^3 + 6b^3 = 781?$$

### EXERCICE 4.

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe d'ordre 120 et d'élément neutre  $e$ . Quels sont les ordres possibles des éléments de  $G$  ?