Université Claude Bernard Lyon I
Licence "Sciences et technologie"
Unité d'enseignement "Techniques mathématiques de base"
(Semestre 1, groupe 1)

Épreuve de contrôle continu

jeudi 30 octobre 2003 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet comporte deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Exercice 1
Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x,y,z) = (0, x+y, x-3y).$$

1) Montrer que f est linéaire et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

3) A-t-on $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

4) Déterminer l'application linéaire $f \circ f$.

Exercice 2
On note :

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y-z=0\}$$

et, pour tout réel m, on note :

$$F_m = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (m+1)^2 x + (m+1)y + (m^2-1)z = 0\}.$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
(On admettra sans en écrire la preuve que pour chaque valeur de m, F_m est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.)

2) Déterminer une base de E, une base de F_1, une base de $E+F_1$ et une base de $E \cap F_1$.

3) Montrer que si $m \neq -1$, $\dim F_m = 2$ et déterminer $\dim F_{-1}$.

4) Déterminer, en fonction du paramètre réel m, la dimension de l'intersection $E \cap F_m$.

(TSVP)

Exercice 3

Soit $n \geq 1$, et soit v_1, v_2, v_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On pose :

$$F = \{xv_1 + yv_2 + zv_3 \in \mathbf{R}^n \mid x,\ y,\ z \in \mathbf{R} \text{ et } x + y + z = 0\}.$$

(On admettra sans en écrire la preuve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$).

1) On suppose que (v_1, v_2, v_3) est libre dans $\mathbf{R}^n$.
Montrer que $(v_2 - v_1, v_3 - v_1)$ est une base de F.

2) Dans cette question on ne suppose plus que (v_1, v_2, v_3) est libre dans $\mathbf{R}^n$.
On note $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

a) Montrer que $E = F + \mathrm{Vect}(v_1)$.

b) Montrer que $\dim F \geq \dim E - 1$.

c) Donner un exemple montrant que l'inégalité du b) peut être une inégalité stricte.