Université Claude-Bernard Lyon I

L1 2003-2004 TMB Controle continu du 2/4/04. Durée 1h30.

On attachera la plus grande importance à la rédaction et aux justifications apportées. Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice I. - Soit $u : \mathbb{R}2 \longrightarrow \mathbb{R}3$ une application linéaire. On note $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}2$ et $\beta' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}3$. L'application u est définie par: $u(e_1 + e_2) = f_1 + 2f_2 + f_3$ et $u(e_1 - e_2) = f_2 + f_3$.

i) Exprimer $u(e_1)$ et $u(e_2)$ dans la base β', en déduire la matrice de u par rapport aux bases canoniques β et β'.
ii) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$. Calculer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
iii) L'application u est-elle injective? Bijective? Justifier.
iv) Soit $v : \mathbb{R}2 \longrightarrow \mathrm{Im}(u)$ définie par $v(a) = u(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}2$. Montrer que v est bijective.

Exercice II. - Soient $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ et $F = Vect(a, b, c, d)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}4$ engendré par les vecteurs $a = (1, -1, 0, 0)$, $b = (1, 0, -1, 0)$, $c = (1, 1, 1, 1)$ et $d = (3, 0, 0, 1)$.

i) Calculer une base de E.
ii) Calculer une base de F.
iii) Calculer une base de $E \cap F$.
iv) A-t-on $E + F = \mathbb{R}4$? Justifier.
v) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}4$? Justifier.
vi) Déterminer un sous-espace vectoriel G tel que $E \oplus G = \mathbb{R}4$.

Exercice III. - Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}3$ vers $\mathbb{R}3$. Soient $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$. On suppose $r_1 \neq r_2$.

1) Montrer que deux vecteurs *non nuls* v_1 et v_2 tels que $T(v_1) = r_1 v_1$ et $T(v_2) = r_2 v_2$ forment une famille libre.
2) On considère l'application linéaire T de $\mathbb{R}3$ vers $\mathbb{R}3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

i) Calculer $T(x, y, z)$.
ii) Trouver une base de chacun des deux sous-espaces suivants (vous pouvez admettre que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}3$):

$$V_1 = \{u \in \mathbb{R}3 \ : \ T(u) = u\} \qquad V_2 = \{u \in \mathbb{R}3 \ : \ T(u) = 2u\}$$

iii) Montrer que $\mathbb{R}3 = V_1 \oplus V_2$.