Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Techniques mathématiques de base"

(Semestre 1, groupe 1)

Examen terminal (première session)

mardi 6 janvier 2004 - Durée : 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso)

Exercice 1

N.B. : on attend une justification de chacun des résultats demandés, y compris pour les questions où on demande une réponse par "oui" ou par "non".

1) La famille suivante de vecteurs de $\mathbf{R}^3$:

$$((1,1,1),(1,1,0),(0,0,0),(0,1,1))$$

est-elle libre ?

2) Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire f de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ telle que :

$$f(1,1,1)=(1,1,1),\ f(1,1,0)=(2,2,2),\ f(0,0,0)=(0,0,0),\ f(0,1,1)=(3,3,3)$$

et que pour tout $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $f(x,y,z)=(-2x+4y-z,-2x+4y-z,-2x+4y-z)$.

3) Écrire la matrice de f et la matrice de $f\circ f$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

4) Donner, dans l'ordre de votre choix, la dimension de l'image de f, la dimension du noyau de f, une base de l'image de f et une base du noyau de f.

5) A-t-on ou non $\mathbf{R}^3=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$?

Exercice 2

Soit θ un réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, avec $\theta\neq 0$.

1) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2-2z\sin\theta+\tan^2\theta=0.$$

2) Écrire chaque solution sous la forme $re^{i\varphi}$ où r est un réel strictement positif et φ un réel.

Exercice 3

Calculer les deux réels suivants (en justifiant les résultats obtenus !)

$$\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}(\ln 7)) \qquad\qquad \operatorname{Arcsin}(\sin(\frac{77\pi}{15}))$$

(TSVP)

Exercice 4
Calculer sur l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin(2\varphi)}.$$

Exercice 5
Résoudre sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ l'équation différentielle :

$$y' - \frac{3}{t+1} y = \frac{t+1}{(t-1)^2}$$

où l'inconnue est la fonction y, dérivable de I dans $\mathbf{R}$ et t désigne la variable dans I.