

Université Claude-Bernard Lyon I

L1 2003-2004 TMB Examen du 28/6/04. Durée 1h30.

On attachera la plus grande importance à la rédaction et aux justifications apportées. Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit T l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans les bases canoniques est

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- i) Écrire l'image du vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) .
- ii) Trouver une base pour le noyau et l'image de T .
- iii) Trouver les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ tel que $(a, 0, 0)$ soit dans l'image de T .

Exercice 2. Calculer une primitive de

$$\frac{\ln(x)}{x^2}$$

Indication: On pourra intégrer par parties.

Exercice 3. i) Calculer une primitive de

$$\frac{1}{x^2 + x + 1}$$

ii) Calculer l'ensemble des solutions sur \mathbb{R}^{*+} (l'ensemble des réels strictement supérieur à 0) de l'équation différentielle:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

Exercice 4. Soient θ et θ' deux réels. Exprimer le module et un argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ en fonction de θ et θ' .

Indication: On pourra factoriser par $e^{i(\theta+\theta')/2}$.