Université Claude Bernard Lyon 1

Techniques Mathématiques de Base

Licence première année - semestre d'été - groupe 2

Examen partiel

Le 20 avril 2004, 13h30–15h00.

L'usage de documents écrits ou de calculatrices est interdit. On attachera de l'importance à la clarté de la rédaction; en particulier toute réponse sera justifiée.

L'examen contient trois exercices qui sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 1.

1. Trouver des réels x et y tels que :

$$(x+iy)^2 = -18i \quad .$$

2. Quel est le discriminant du polynôme :

$$X^2 + (5i-3)X - 3i - 4 \quad ?$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 + (5i-3)z^2 - 3i - 4 = 0 \quad .$$

<u>EXERCICE 2</u>.

On considère la fonction
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right).$$

1. En quels points est-ce que f est bien définie et continue?
2. Etablir une relation entre $f(x)$ et $f(x+2\pi)$, et entre $f(x)$ et $f(x+\pi)$.
3. Calculer $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$.
4. Déterminer les zéros de f.
5. En quels points est-ce que f est dérivable?
6. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
7. Tracer le graphe de f en indiquant clairement les zéros, les points de non-continuité, les limites et la croissance/décroissance de la fonction.

<u>EXERCICE 3</u>.

1. En utilisant le théorème des acroissements finis, montrer que
$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\frac{4\pi}{15} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{60}.$$
2. A l'aide de la formule de Taylor montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $0 < c < 1$ tel que
$$\ln(1+x^2) = x^2\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}.$$
3. Déduire de 2 que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$0 \leqslant \ln(1+x^2) \leqslant x^2.$$