Université Claude-Bernard Lyon 1

Examen de
Techniques Mathématiques de Base

Licence 1ère année. Groupe 2

Mardi 06 janvier 2004. Durée de l'épreuve : 2H

L'usage de documents écrits ou de calculatrices est interdit. On attachera de l'importance à la clarté de la rédaction ; en particulier toute réponse sera justifiée.

EXERCICE 1. Calculer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\ln(\cos x)}{x \sin x} \right)$.

EXERCICE 2. Montrer que l'on a, pour tout réel $x \in [0,1[$:

$$x \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x \leq \frac{x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$$

(Indication : on pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

EXERCICE 3. Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2x\operatorname{ch} x.$$

EXERCICE 4

1) Décomposer la fraction rationnelle $F(t) = \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^2(t^2 + t + 1)}$ en éléments simples.

2) Calculer une primitive de la fonction $t \to F(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

3) Calculer $\int \frac{4\operatorname{ch}^2(x)}{2\operatorname{ch} x + 1} dx$ (Indication : on pourra utiliser le changement de variable $t = e^x$).

4) Déterminer une primitive de la fonction $t \to \frac{1}{1 + e^{2x}}$.

5) Résoudre l'équation différentielle : $y'(x) - \frac{y(x)}{1 + e^{2x}} = 0$.

6) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) - \frac{y(x)}{1 + e^{2x}} = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}} \frac{\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}(x)}{2\operatorname{ch} x + 1}.$$