

Techniques Mathématiques de Base

Licence première année - semestre d'été - groupe 2

Examen

Le 1 juin 2004, 13h00–15h00.

L'usage de documents écrits ou de calculatrices est interdit. On attachera de l'importance à la clarté de la rédaction; en particulier toute réponse sera justifiée.

L'examen contient quatre exercices qui sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 1. Étudier la fonction

$$f(x) := \ln(x - 1) - \ln(2x^2 + 5x - 3)$$

en suivant les étapes ci-dessous:

1. Trouver le domaine de définition de f .
2. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers les bornes du domaine de définition de f .
3. Rechercher les zéros de f .
4. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant au domaine de f et dresser le tableau de variation de f .
5. Calculer la valeur minimale et/ou maximale atteinte par f .
6. Tracer le graphe de f en indiquant clairement l'information que vous avez obtenue dans 1-5.

EXERCICE 2.

1. Décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ en facteurs simples.
2. Quelles sont les primitives de

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

sur l'intervalle $] -1, 1[$?

3. En posant $u = \sin x$, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx .$$

EXERCICE 3.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + ay = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

Il faut bien distinguer les cas $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

2. Pour quel a existe-t'il une solution qui est bornée?
3. Trouver une solution particulière de

$$y'' + y = \cos x. \tag{1}$$

4. Trouver toutes les solutions de (1).
5. Quelle solution de (1) vérifie $y(0) = 3$ et $y'(0) = 5$?

EXERCICE 4.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = 0$$

sur $] - 1, 1[$.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - xy = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

sur $] - 1, 1[$.