

Techniques Mathématiques de Base

Licence première année - semestre d'été - groupe 2

Examen de rattrapage

Le 28 juin 2004, 13h00–14h30.

L'usage de documents écrits ou de calculatrices est interdit. On attachera de l'importance à la clarté de la rédaction; en particulier toute réponse sera justifiée.

L'examen contient quatre exercices qui sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 1.

1. Rappeler la définition de la fonction $x \mapsto \arccos(x)$ (préciser son domaine).
2. Déterminer le domaine et le signe de $x \mapsto \arccos''(x)$.

EXERCICE 2. On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{\left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right|}$$

sur \mathbb{R} .

1. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Rechercher les zéros de f .
3. Trouver le domaine de définition de f' .
4. Déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
5. Tracer le graphe de f en indiquant clairement l'information que vous avez obtenue dans 1-4.

EXERCICE 3.

1. Calculer, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

(a)

$$\int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx ,$$

(b)

$$\int_0^a \frac{x}{a^2 + x^2} dx .$$

2. En intégrant par parties, calculer

$$\int_0^1 (x + 2) \ln(x^2 + 1) dx .$$

EXERCICE 4

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{x + 2}{x + 1} y = 0$$

sur \mathbb{R}^+ .

2. Trouver une solution particulière de

$$y' + \frac{x + 2}{x + 1} y = \frac{x}{x + 1}. \tag{1}$$

3. Trouver tous les solutions de (1).